Feuille exercice : Variations et signes d'une fonction

Exercice 1

1) $\mathcal{D}_f = [-10; 12]$

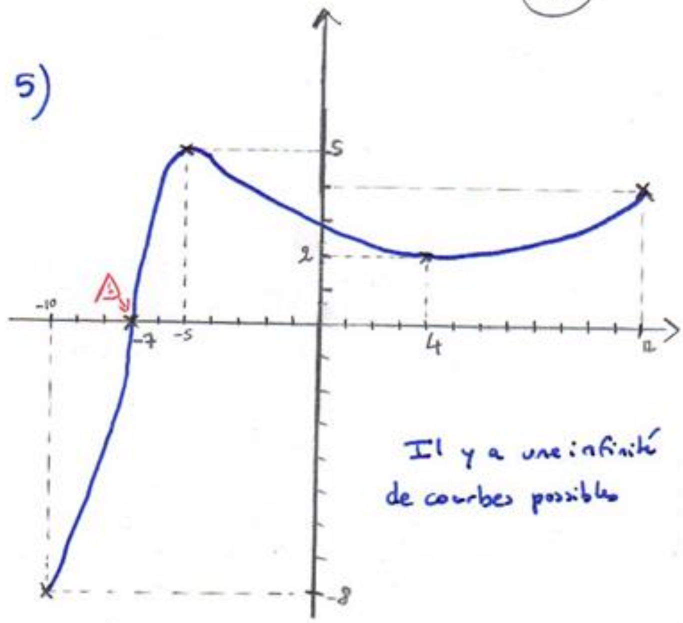
2) 2 a 2 antécédents (dont 4)
4 a 3 " (dont 12)

3) Le minimum de f est -8 atteint en -10
le maximum de f est 5 ——— -5

4)

x	-10		-7		12
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

5)



Il y a une infinité de courbes possibles

Exercice 2

1) $\mathcal{D}_f = [-6; 10]$

2) L'image de 10 par f est -4
L'antécédent de 4 par f est 2

3)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

4) a) Pour tout x de $[-6; 10]$,
on a $-8 \leq f(x) \leq 10$

b) Si $x \in]-6; 0]$ alors $f(x) \in [4; 10[$

c) Si $x \in [-6; 10]$ alors $-8 \leq f(x) \leq 10$

d) Si $x \in]-2; 4[$ alors $f(x) \in]-8; 6]$

Exercice 3

x	-5		-4		-2		2		8
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

x	-5		-3		0		8
Variations de $f(x)$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-3

Exercice 6

a) Soient a et b deux réels de $]-1;+\infty[$ avec $a<b$

$$f(a)-f(b) = (a+1)^2-4-(b+1)^2+4 = (a+1)^2-(b+1)^2$$
$$= (a+1-(b+1))(a+1+b+1)$$
$$\underline{f(a)-f(b) = (a-b)(a+b+2)}$$

Signe de $a-b$? On sait que $a<b$ donc $a-b<0$

$a-b$ est <u>négatif</u>

Signe de $a+b+2$? $a \in]-1;+\infty[$ donc $a>-1$
$b \in]-1;+\infty[$ donc $b>-1$

ainsi $a+b>-1+(-1)$
$\iff a+b+2>0$

$a+b+2$ est <u>positif</u>

Le produit $(a-b)(a+b+2)$ est donc négatif donc $f(a)-f(b)<0$

$\iff f(a) \boxed{<} f(b)$

avec $a < b$

f est <u>croissante</u> sur $]-1;+\infty[$

b) Soient a et b deux réels de $]4;+\infty[$ avec $a<b$

Cherchons le signe de $i(a)-i(b)$

$$i(a)-i(b) = -3(a-4)^2+15-(-3(b-4)^2+15)$$
$$= -3(a-4)^2+15+3(b-4)^2-15$$
$$= 3\left[-(a-4)^2+(b-4)^2\right] = 3\left[(b-4)^2-(a-4)^2\right]$$
$$= 3\left[(b-4+a-4)((b-4)-(a-4))\right]$$
$$= 3(b+a-8)(b-a)$$

<u>Signe de $b+a-8$?</u>

On a $a \in]4;+\infty[$ donc $a>4$ et $b \in]4;+\infty[$ donc $b>4$

Si $a>4$ et $b>4$ alors on a $a+b>8$ ainsi $a+b-8>0$

<u>$a+b-8$ est positif</u>

<u>Signe de $b-a$?</u>

On a $a<b$ donc $0<b-a$ ainsi <u>$b-a$ est positif</u>

3 étant positif, le signe du produit de $b+a-8$ par $b-a$ est donc positif

Donc $i(a)-i(b)>0$
$i(a)>i(b)$
pour $a<b$

Ainsi, i est décroissante sur $]4;+\infty[$

c) Soient a et b deux reels avec $a<b$

$g(a)-g(b) = -3a+1-(-3b+1)$

$\Leftrightarrow g(a)-g(b) = -3a+1+3b-1$

$\Leftrightarrow g(a)-g(b) = 3(-a+b)$

On sait que $a<b \Leftrightarrow 0<b-a$ donc $-a+b$ est positif

3 est positif

Ainsi $g(a)-g(b)>0$

$\Leftrightarrow g(a)>g(b)$

avec $a<b$ donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

d) Soient a et b deux réels de $]3;+\infty[$ avec $a<b$

$h(a)-h(b) = -2(2a-6)^2+5-(-2(2b-6)^2+5)$

$= -2(2a-6)^2 \cancel{+5} + 2(2b-6)^2 \cancel{-5}$

$= 2\left[-(2a-6)^2+(2b-6)^2\right] = 2\left[(2b-6)^2-(2a-6)^2\right]$

$= 2\left[(2b-6)+(2a-6)\right]\left[(2b-6)-(2a-6)\right]$

$= 2(2b+2a-12)(2b-2a)$

$= 2\times 2(b+a-6)\times 2(b-a)$

$h(a)-h(b) = 8(b+a-6)(b-a)$

* 8 est positif
* $a<b$ donc $0<b-a$ donc $(b-a)$ est positif
* $a\in]3;+\infty[$ donc $a>3$; $b\in]3;+\infty[$ donc $b>3$ } Ainsi $a+b>6$ $\Leftrightarrow a+b-6>0$

$a+b-6$ est positif

Ainsi $h(a)-h(b)>0$ $\qquad (+)\times(+)\times(+) = +$

$\Leftrightarrow h(a)>h(b)$

avec $a<b$

donc h est décroissante sur $]3;+\infty[$