Feuille exercices : Résolution d'inéquation (1/2)

Exercice 1

a) $3(x-4) - 2x \leq 4x - 3$

$\Leftrightarrow 3x - 12 - 2x \leq 4x - 3$

$\Leftrightarrow x - 12 \leq 4x - 3$

$\Leftrightarrow -3x \leq 9$

$\Leftrightarrow x \geq -3$

$S = [-3 ; +\infty[$

b) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x - 3\right) > \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right) - \frac{x-4}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6}x - \frac{3}{2} > -\frac{1}{12}x - \frac{1}{6} - \frac{x}{2} + 2$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{12} - \frac{18}{12} > -\frac{1}{12}x - \frac{2}{12} - \frac{6x}{12} + \frac{24}{12}$

$\Leftrightarrow 2x - 18 > -7x + 22$

$\Leftrightarrow 9x > 40$

$\Leftrightarrow x > \frac{40}{9}$

$S = \left]\frac{40}{9} ; +\infty\right[$

c) $3(2-2x) + (2-2x) \leq 0$

$\Leftrightarrow 6 - 6x + 2 - 2x \leq 0$

$\Leftrightarrow -8x \leq -8$

$\Leftrightarrow x \geq 1$

$S = [1 ; +\infty[$

$x - 4x + 2 \leq -2(x+1) - x$

$\Leftrightarrow -3x + 2 \leq -2x - 2 - x$

$\Leftrightarrow -3x + 3x \leq -2 - 2$

$\Leftrightarrow 0 \leq -4$

Impossible

$S = \emptyset$

$3x - 4 \leq 3x + 1$

$\Leftrightarrow 3x - 3x \leq 1 + 4$

$\Leftrightarrow 0 \leq 5$

Toujours vraie

$S = \mathbb{R}$

Exercice 2

a) $x^2 \geq 16$

$\Leftrightarrow x^2 - 16 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-4)(x+4) \geq 0$

$x-4 > 0$ | $x+4 > 0$

$x > 4$ | $\Leftrightarrow x > -4$

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
signe de $x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
signe du pdt		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty ; -4] \cup [4 ; +\infty[$

b) $x^2 < -2$

Un carré étant toujours positif ou nul il n'y a pas de solution $S = \emptyset$

c) $x^2 + 4 > 0$

Un carré étant toujours positif ou nul $x^2 + 4$ est toujours positif

$S = \mathbb{R}$

d) $(x+4)(2x-3) < (x+4)(3x-1)$

$\Leftrightarrow (x+4)(2x-3) - (x+4)(3x-1) < 0$

$\Leftrightarrow (x+4)[(2x-3) - (3x-1)] < 0$

$\Leftrightarrow (x+4)(-x-2) < 0$

$x+4 > 0$ | $-x-2 > 0$

$\Leftrightarrow x > -4$ | $\Leftrightarrow x < -2$

x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
Signe de $x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-x-2$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe du pdt		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty ; -4[\cup]-2 ; +\infty[$

$(2x+1)^2 > (3-x)^2$

$(2x+1)^2 - (3-x)^2 > 0$

$((2x+1) + (3-x))((2x+1) - (3-x)) > 0$

$(x+4)(3x-2) > 0$

$x+4 > 0$ | $3x-2 > 0$

$x > -4$ | $\Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$

x	$-\infty$		-4		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
signe de $x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $3x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe du pdt		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty ; -4[\cup]\frac{2}{3} ; +\infty[$

f) $-(2-3x)(2+x) > 0$

plusieurs possibilités

1) Multiplier les 2 membres par -1 (en changeant le signe)

2) Développer -1 dans un des facteurs.

$\Leftrightarrow (2-3x)(2+x) < 0$

$2-3x > 0$ | $2+x > 0$

$\Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$ | $\Leftrightarrow x > -2$

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $2-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $2+x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe du pdt		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty ; -2[\cup]\frac{2}{3} ; +\infty[$

g) $3(x+1)(1-2x)-(3-6x)(2-x)\leq 0$

$\Leftrightarrow 3(x+1)(1-2x)-3(1-2x)(2-x)\leq 0$

$\Leftrightarrow 3(1-2x)[(x+1)-(2-x)]\leq 0$

$\Leftrightarrow 3(1-2x)(2x-1)\leq 0$

$\Leftrightarrow -3(2x-1)^2\leq 0$

$(2x-1)^2$ est toujours positif ou nul

donc $-3(2x-1)^2$ est toujours négatif ou nul

donc $S=\mathbb{R}$

(Un tableau de signe était possible

h) $9x^2-1+(-6x-2)(x+4)>0$

$\Leftrightarrow (3x+1)(3x-1)-2(3x+1)(x+4)>0$

$\Leftrightarrow (3x+1)[(3x-1)-2(x+4)]>0$

$\Leftrightarrow (3x+1)(x-9)>0$

$3x+1>0$

$\Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}$

$x-9>0$

$\Leftrightarrow x>9$

x	$-\infty$		$-1/3$		9		$+\infty$
Signe de $3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-9$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe du pdt		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=]-\infty;-\frac{1}{3}[\cup]9;+\infty[$

i) $-2x(3-x)^2(x-4)(20x+5)(1-2x)\geq 0$

~~Racines~~ ?

$-2x>0$ $\Leftrightarrow x<0$ | $3-x>0$ $\Leftrightarrow x<3$ | $x-4>0$ $\Leftrightarrow x>4$ | $20x+5>0$ $\Leftrightarrow x>-\frac{1}{4}$ | $1-2x>0$ $\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-1/4$		0		$1/2$		3		4		$+\infty$
Signe de $-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	
Signe de $(3-x)^2$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-4$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $20x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
Signe de $1-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
Signe du pdt		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

$S=]-\infty;-\frac{1}{4}]\cup[0;\frac{1}{2}]\cup\{3\}\cup[4;+\infty[$

III - Inéquation quotient

1) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\frac{x-3}{2-x} > 0$$

$x-3>0 \iff x>3$ | $2-x>0 \iff x<2$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
Signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $2-x$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe du qt		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

$S =]2;3[$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \geqslant 0$$

$$\iff \frac{x-1+x}{x(x-1)} \geqslant 0$$

$$\iff \frac{2x-1}{x(x-1)} \geqslant 0$$

$2x-1>0 \iff x>\frac{1}{2}$ | $x>0 \iff x>0$ | $x-1>0 \iff x>1$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
Signe de $2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe du qt		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

$S =]0;\frac{1}{2}] \cup]1;+\infty[$

3) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\frac{3x-1}{x+1} < 2 \iff \frac{3x-1}{x+1} - 2 < 0$$

$$\iff \frac{3x-1-2(x+1)}{x+1} < 0$$

$$\iff \frac{x-3}{x+1} < 0$$

$x-3>0 \iff x>3$ | $x+1>0 \iff x>-1$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe du qt		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$S =]-1;3[$

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{4}{x} \leq x \Leftrightarrow \frac{4}{x} - x \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{4-x^2}{x} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(2-x)(2+x)}{x} \leq 0$$

$2-x>0$ $\Leftrightarrow x<2$ | $2+x>0$ $\Leftrightarrow x>-2$ | $x>0$ $\Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
Signe de $2-x$		+		+		+	0	−	
Signe de $2+x$		−	0	+		+		+	
Signe de x		−		−	0	+		+	
Signe du qt		+	0	−	‖	+	0	−	

$S = [-2;0[\cup [2;+\infty[$

5) Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$$\frac{2x(x-1)}{(x+2)^2} > 0$$

$2x>0$ $\Leftrightarrow x>0$ | $x-1>0$ $\Leftrightarrow x>1$

$(x+2)^2$ est positif ou nul

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
Signe de $2x$		−		−	0	+		+	
Signe de $x-1$		−		−		−	0	+	
Signe de $(x+2)^2$		+	0	+		+		+	
Signe du qt		+	‖	+	0	−	0	+	

$S =]-\infty;-2[\cup]-2;0[\cup]1;+\infty[$

6) Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{5}{2};3\}$

$$\frac{x}{x-3} - \frac{2x+1}{2x-5} < 0 \Leftrightarrow \frac{x(2x-5)-(2x+1)(x-3)}{(x-3)(2x-5)} < 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-5x-(2x^2-6x+x-3)}{(x-3)(2x-5)} < 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{(x-3)(2x-5)} < 0$$

3 est strictement positif

$x-3>0$ $\Leftrightarrow x>3$ | $2x-5>0$ $\Leftrightarrow x>\frac{5}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
Signe de 3		+		+		+	
Signe de $x-3$		−		−	0	+	
Signe de $2x-5$		−	0	+		+	
Signe du qt		+	‖	−	‖	+	

$S =]\frac{5}{2};3[$