Feuille exercice Valeur absolue

Exercice 1 :

Compléter le tableau ci-dessous :

x	y	$\lvert x \rvert$	$\lvert y \rvert$	$\lvert x \rvert + \lvert y \rvert$	$\lvert x+y \rvert$
1	-5	1	5	6	4
-6	2	6	2	8	4
2	6	2	6	8	8
-3	-3	3	3	6	6

Exercice 2 :

Compléter le tableau ci-dessous :

Encadrement	Intervalle	Centre	Rayon	Distance	Valeur absolue
$3 < x < 9$	$x \in]3\,;9[$	6	3	$d(x\,;6) < 3$	$\lvert x-6 \rvert < 3$
$-3 < x < 7$	$x \in]-3;7[$	2	5	$d(x;2) < 5$	$\lvert x-2 \rvert < 5$
$-1{,}1 \leqslant x \leqslant -0{,}9$	$x \in [-1{,}1;-0{,}9]$	-1	0,1	$d(x\,;-1) \leqslant 0{,}1$	$\lvert x+1 \rvert \leqslant 0{,}1$
$-\frac{5}{2} < x < -\frac{3}{2}$	$x \in]-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}[$	-2	$1/2$	$d(x;-2) < \frac{1}{2}$	$\lvert x+2 \rvert < \frac{1}{2}$
$x < -2$ ou $x > 6$	$x \in]-\infty;-2[\cup]6;+\infty[$	2	4	$d(x\,;2) > 4$	$\lvert x-2 \rvert > 4$
$-1 \leqslant x \leqslant 5$	$x \in [-1\,;5]$	2	3	$d(x;2) \leqslant 3$	$\lvert x-2 \rvert \leqslant 3$
$x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 6$	$x \in]-\infty;-2] \cup [6;+\infty[$	2	4	$d(x;2) \geqslant 4$	$\lvert x-2 \rvert \geqslant 4$
$x < -3$ ou $x > 1$	$x \in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$	-1	2	$d(x;-1) > 2$	$\lvert -x-1 \rvert > 2$

$\lvert x+1 \rvert > 2$

Exercice 3 :

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Donner la réponse exacte en justifiant toutes les étapes du calcul.

1. La quantité $(2\sqrt{2}-5)+(3-\sqrt{2})$ est égale à :
   a. $3\sqrt{2}+8$ b. $\sqrt{2}-2$ c. $8-3\sqrt{2}$ d. $2-\sqrt{2}$ e. $2+\sqrt{2}$

2. Soit x un nombre réel. Alors $\lvert -x \rvert$ est égale à :
   a. x b. –x c. $\lvert x \rvert$ d. Aucune de ces réponses

3. L'intervalle [-1 ;3] est représenté par l'inéquation :
   a. $\lvert x+1 \rvert \leq 2$ b. $\lvert x-1 \rvert \leq 2$ c. $1 \leq \lvert x \rvert \leq 3$ d. Aucune de ces réponses

4. L'équation $\lvert x+3 \rvert = 5$ a pour solution :
   a. 2 b. 2 et -2 c. 2 et -8 d. 5 et 2 e. Aucune de ces réponses

Exercice 4 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $\lvert x-3 \rvert = 4$
b. $\lvert 2x-6 \rvert = 3$
c. $\lvert x^2+1 \rvert = 4$
d. $\lvert x^2-3 \rvert = -4$
e. $\lvert 2-x \rvert > 3$
f. $\lvert x+5 \rvert \leq 2$
g. $\lvert 3x-1 \rvert < 2$
h. $\lvert x-2 \rvert > \lvert 6-2x \rvert$ (très dur)

a) $|x-3|=4$

$x-3=4$ ou $x-3=-4$

$x=7$ ou $x=-1$ $\qquad S=\{-1;7\}$

b) $|2x-6|=3$

$2x-6=3$ ou $2x-6=-3$

$2x=9$ ou $2x=3$

$x=\frac{9}{2}$ ou $x=\frac{3}{2}$ $\qquad S=\left\{\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right\}$

c) $|x^2+1|=4$

$x^2+1=4$ ou $x^2+1=-4$

$x^2=3$ ou $x^2=-5$ (un carré est positif)

$x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$ $\qquad S=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$

d) $|x^2-3|=-4$

$|x^2-3|$ est positif donc $S=\emptyset$

e) $|2-x|>3$

Les solutions de $|2-x|>3$ sont les réels x dont la distance à 2 est supérieure à 3 donc $S=]-\infty;-1[\cup]5;+\infty[$

f) $|x+5|\leqslant 2$ donc $|x-(-5)|\leqslant 2$

Les solutions de $|x+5|\leqslant 2$ sont les réels x dont la distance à -5 est inférieure ou égale à 2 donc $S=[-7;-3]$

g) $|3x-1|<2$ donc $|3(x-\frac{1}{3})|<2$ donc $|x-\frac{1}{3}|<\frac{2}{3}$

Les solutions de $|x-\frac{1}{3}|<\frac{2}{3}$ sont les réels x dont la distance à $\frac{1}{3}$ est inférieure à $\frac{2}{3}$

$S=]-\frac{1}{3};1[$

h) $|x-2| > |6-2x|$

$x-2>0$
$x>2$

$6-2x>0$
$-2x>-6$
$x<3$

x		2		3	
$x-2$	négatif	|	positif	|	positif
$6-2x$	positif	|	positif	|	négatif

$*$ Si $x \in]-\infty ; 2]$ alors :

$|x-2| > |6-2x|$

$-x+2 > 6-2x$

$x > 4$ (or $x \in]-\infty ; 2]$) donc $S_1 = \emptyset$

$*$ Si $x \in [2;3]$ alors :

$|x-2| > |6-2x|$

$x-2 > 6-2x$

$3x > 8$

$x > \frac{8}{3}$ et $x \in [2;3]$ donc $S_2 =]\frac{8}{3} ; 3]$

($\frac{8}{3} \approx 2{,}66$)

$*$ Si $x \in [3;+\infty[$

$|x-2| > |6-2x|$

$x-2 > -6+2x$

$-x > -4$

$x < 4$ et $x \in [3;+\infty[$ donc $S_3 = [3;4[$

Ainsi : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \underline{\underline{]\frac{8}{3} ; 4[}}$