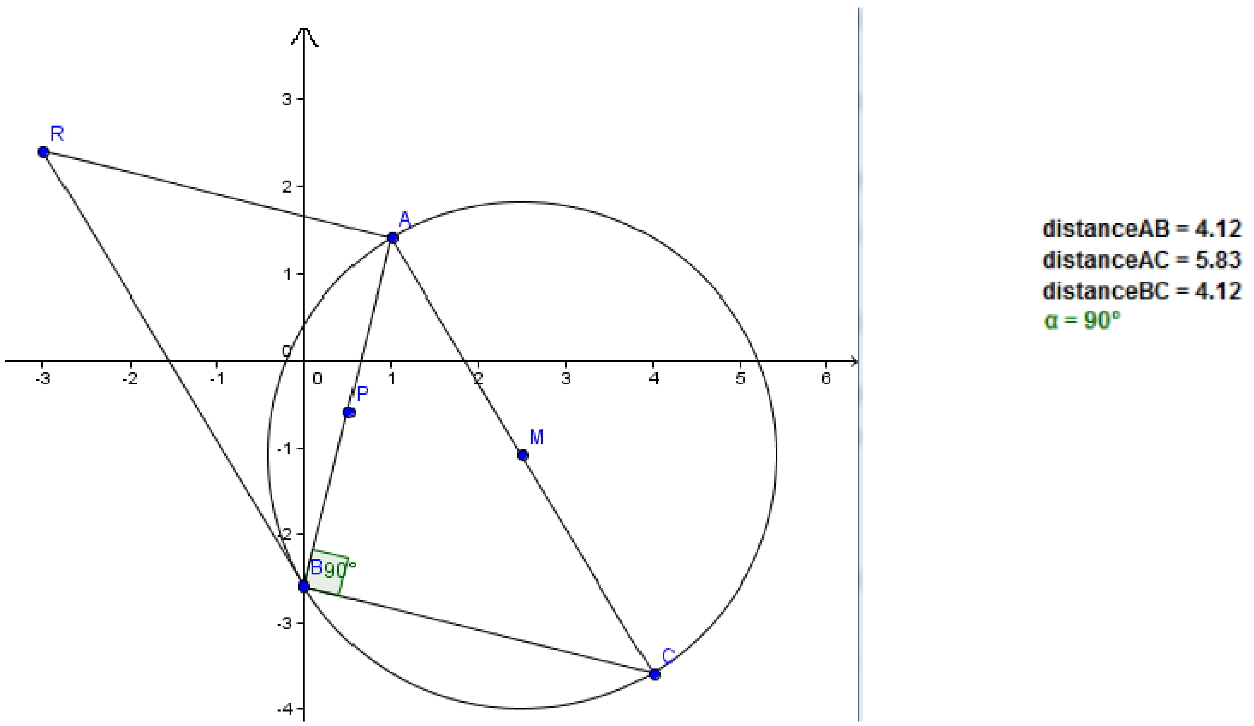
Correction : Feuille Révision : Géométrie analytique

Exercice :

1) Repère à faire sur votre feuille, ici utilisation de GeoGebra



2) On remarque que selon le logiciel, on a AB = BC mais aussi que $\widehat{ABC} = 90°$ ainsi le triangle ABC semble être rectangle isocèle en B

3) Pour vérifier notre conjecture, nous avons besoin des mesures des trois côtés du triangle ABC.
Calculons les dans le repère (O ; I ; J) :

AB=$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (\sqrt{2} - 4 - \sqrt{2})^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{\mathbf{17}}$

CB=$\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(0-4)^2 + (\sqrt{2} - 4 - (\sqrt{2} - 5))^2} = \sqrt{16 + (\sqrt{2} - 4 - \sqrt{2} + 5)^2}$

Ainsi $CB = \sqrt{16+1} = \sqrt{\mathbf{17}}$

AC=$\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (\sqrt{2} - 5 - \sqrt{2})^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{\mathbf{34}}$

On a donc bien AB = CB donc le triangle est bien isocèle en B

Rectangle en B ?
Dans le triangle ABC, le plus long côté est AC.
D'une part $AC^2 = \sqrt{34}^2 = 34$ D'autre part $AB^2 + BC^2 = \sqrt{17}^2 + \sqrt{17}^2 = 17 + 17 = 34$
On remarque que $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ainsi d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle en B

Donc, le triangle ABC est rectangle isocèle en B

4) a) Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit au triangle est le milieu de l'hypoténuse, cherchons donc les coordonnées du milieu M de [AC] dans le repère (O ; I ; J)

D'après le cours M a pour coordonnées :

$$x_M = \frac{x_A+x_C}{2} \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_A+y_C}{2}$$

$$x_M = \frac{1+4}{2} \quad \text{et} \quad y_M = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}-5}{2}$$

$$x_M = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad y_M = \frac{2\sqrt{2}-5}{2}$$

Ainsi M a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2} ; \frac{2\sqrt{2}-5}{2}\right)$

5) a) Je sais que le triangle ABC est isocèle en B et que (MB) est la médiane issue de B puisque M est le milieu de [AC]

Or dans un triangle isocèle, la médiane issue du sommet principal est également la hauteur issue de ce sommet.

Donc, le triangle AMB est rectangle en M et le centre de son cercle circonscrit est donc le milieu de l'hypoténuse soit le milieu de [AB]

D'après le cours P milieu de [AB] a pour coordonnées

$$x_P = \frac{x_A+x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_P = \frac{y_A+y_B}{2}$$

$$x_P = \frac{1+0}{2} \quad \text{et} \quad y_P = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}-4}{2}$$

$$x_P = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y_P = \sqrt{2}-2$$

Ainsi, P a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; \sqrt{2}-2\right)$

6) On veut que le quadrilatère ACBR soit un parallélogramme or les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Ainsi, si P est le milieu de [AB] alors P est aussi le milieu de [CR]

On a donc :

$$x_P = \frac{x_C+x_R}{2} \qquad et \qquad y_P = \frac{y_C+y_R}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4+x_R}{2} \qquad et \qquad \sqrt{2}-2 = \frac{\sqrt{2}-5+y_R}{2}$$

$$1 = 4 + x_R \qquad et \qquad 2\sqrt{2}-4 = \sqrt{2}-5+y_R$$

$$x_R = -3 \qquad et \qquad 2\sqrt{2}-4 - \sqrt{2}+5 = y_R$$

Les coordonnées de R sont donc $(-3 ; \sqrt{2}+1)$

Exercice 38 p 272

1) Dans le repère (B, C, A) :

$A(0;1)$ $B(0;0)$ $C(1;0)$ $I(0;\frac{1}{2})$ $J(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ $K(\frac{1}{2};0)$

2) Les coordonnées $(x;y)$ du milieu de $[IJ]$ sont :

$$x = \frac{x_I + x_J}{2} = \frac{0 + 1/2}{2} = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{y_I + y_J}{2} = \frac{1/2 + 1/2}{2} = \frac{1}{2}$$

donc $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$

Les coordonnées $(x;y)$ du milieu de $[AK]$ sont :

$x = \frac{0+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$ donc $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$

3) $[IJ]$ et $[AK]$ ont le même milieu, le quadrilatère IAJK est un parallélogramme

4) Les coordonnées $(x;y)$ du milieu de $[IK]$ sont :

$x = \frac{0+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1/2+0}{2} = \frac{1}{4}$ donc $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$

Les coordonées $(x;y)$ du milieu de $[BJ]$ sont :

$x = \frac{0+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{0+1/2}{2} = \frac{1}{4}$ donc $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$

Les coordonées $(x;y)$ du milieu de $[JK]$ sont :

$x = \frac{1/2+1/2}{2} = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1/2+0}{2} = \frac{1}{4}$ donc $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$

Les coordonées du $(x;y)$ milieu de $[CI]$ sont :

$x = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{0+1/2}{2} = \frac{1}{4}$ donc $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$

Les segments $[IK]$ et $[BJ]$ ont le même milieu, tout comme $[JK]$ et $[CI]$

5) Les quadrilatères IAJK, IBKJ et JCKI sont des parallélogrammes

6) Pour IKJA : on a I milieu de $[AB]$, K milieu de $[BC]$ et ABC un triangle, d'après le théorème des milieux (si une droite passe par le milieu de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième) on peut dire que

$(IK) // (AC)$ et donc $(IK) // (AJ)$ *1

De même $(JK) // (AB)$ et donc $(JK) // (AI)$ *2

Or un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles 2 à 2 est un parallélogramme

donc IKJA est un parallélogramme

Exercice 37 c) p 272

Dans (O, I, J), $A(-3;2)$ $B(2;0)$ et $C(-1;-1)$

ABCD est un parallélogramme donc les segments [AC] et [BD] ont le même milieu.

Soit $M(x_M; y_M)$, le milieu de [AC]. M a pour coordonnées :

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3+(-1)}{2} = -2$$

$$\text{et } y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

donc $M\left(-2; \frac{1}{2}\right)$

Or M est aussi milieu de [BD] donc

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_B + y_D}{2}$$

$$-2 = \frac{2 + x_D}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} = \frac{0 + y_D}{2}$$

$$-4 = 2 + x_D \quad \text{et} \quad 1 = y_D$$

$$-6 = x_D \quad \text{et} \quad 1 = y_D$$

Ainsi ABCD est un parallélogramme si D a pour coord $(-6;1)$

Exercice 47 3) $T(1;-2)$ $R(6;0)$ $I(-1;9)$

$$TR^2 = (x_T - x_R)^2 + (y_T - y_R)^2 = (1-6)^2 + (-2-0)^2 = (-5)^2 + (-2)^2 = 29$$

Donc $TR = \sqrt{29}$

$$TI^2 = (x_T - x_I)^2 + (y_T - y_I)^2 = (1-(-1))^2 + (-2-9)^2 = (2)^2 + (-11)^2 = 125$$

Donc $TI = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

$$IR^2 = (x_I - x_R)^2 + (y_I - y_R)^2 = (-1-6)^2 + (9-0)^2 = (-7)^2 + (9)^2 = 130$$

Donc $IR = \sqrt{130}$ [IR] est le plus long côté

D'une part $IR^2 = 130$ D'autre part $TI^2 + TR^2 = 29 + 125 = 159$

On a $IR^2 \neq TI^2 + TR^2$, d'après la contraposée de Pythagore TRI n'est pas rectangle.

TRI est quelconque

Ex 49

$T(-1-\sqrt{3}\,;\,1+\sqrt{3})$ $R(\sqrt{3}-1\,;\,\sqrt{3}-1)$ $I(\sqrt{3}-1\,;\,3+\sqrt{3})$

$$TR^2 = (x_T-x_R)^2+(y_T-y_R)^2 = \left((-1-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-1)\right)^2+\left((1+\sqrt{3})-(\sqrt{3}-1)\right)^2$$
$$= (-1-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1)^2+(1+\sqrt{3}-\sqrt{3}+1)^2$$
$$= (-2\sqrt{3})^2+(2)^2 = 12+4 = 16 \text{ donc } TR=\sqrt{16}$$
$$\underline{TR=4}$$

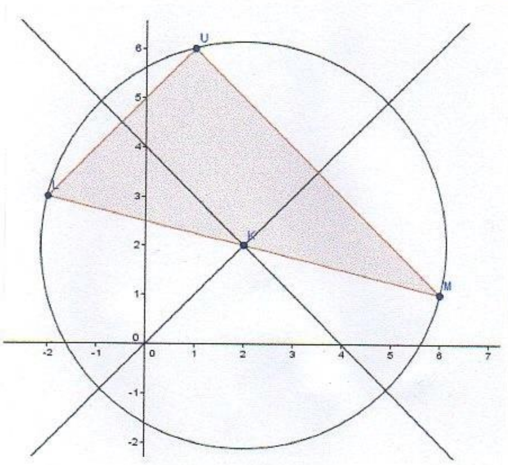
$$TI^2 = (x_T-x_I)^2+(y_T-y_I)^2 = \left((-1-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-1)\right)^2+\left((1+\sqrt{3})-(3+\sqrt{3})\right)^2$$
$$= (-1-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1)^2+(1+\sqrt{3}-3-\sqrt{3})^2$$
$$= (-2\sqrt{3})^2+(-2)^2 = 12+4=16 \text{ donc } TI=\sqrt{16}$$
$$\underline{TI=4}$$

$$IR^2 = (x_I-x_R)^2+(y_I-y_R)^2 = \left((\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}-1)\right)^2+\left((3+\sqrt{3})-(\sqrt{3}-1)\right)^2$$
$$= (\sqrt{3}-1-\sqrt{3}+1)^2+(3+\sqrt{3}-\sqrt{3}+1)^2$$
$$= (0)^2+(4)^2 = 16 \quad \text{donc } IR=\sqrt{16}$$
$$\underline{IR=4}$$

$TR=TI=IR$ donc TRI est un triangle équilatéral

Exercice 59p275

1)



2) Cherchons les coordonnées $(x;y)$ du milieu de $[ML]$:

$$x = \frac{x_M+x_L}{2} = \frac{6+(-2)}{2} = 2$$
$$y = \frac{y_M+y_L}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

Or K a pour coordonnées $(2;2)$ donc K est milieu de $[ML]$

3) On trace les 2 médiatrices de deux côtés du triangle et le centre du cercle circonscrit est l'intersection des médiatrices

4) Le centre de $\mathscr{C}$ semble être K

5) $UL^2 = (x_U-x_L)^2+(y_U-y_L)^2 = (1-(-2))^2+(6-3)^2 = (3)^2+(3)^2 = 18$ donc $UL=3\sqrt{2}$

$UM^2 = (x_U-x_M)^2+(y_U-y_M)^2 = (1-6)^2+(6-1)^2 = (5)^2+(5)^2 = 50$ donc $UM = 5\sqrt{2}$

$LM^2 = (x_L-x_M)^2+(y_L-y_M)^2 = (-2-6)^2+(3-1)^2 = (-8)^2+(2)^2 = 68$ donc $LM = 2\sqrt{17}$

LM est le plus long côté. D'une part $LM^2=68$, d'autre part $LU^2+UM^2=68$

On remarque que $LU^2+UM^2=LM^2$ donc d'après la réciproque de Pythagore, LUM est rectangle en U et donc le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse, càd K