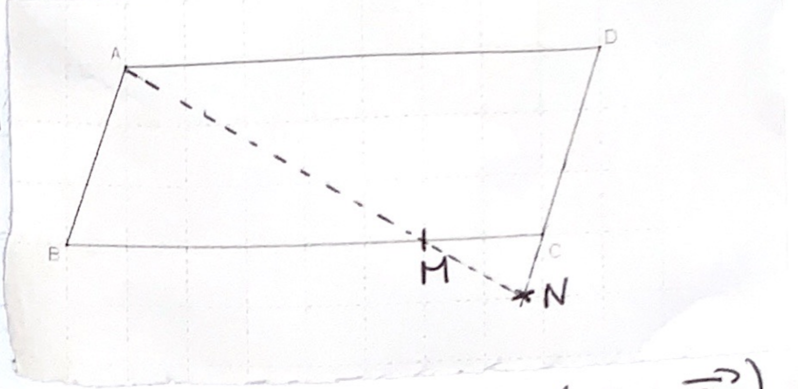
Exercice 1|

1)



2)a) $\vec{AN} = \frac{4}{3}\vec{AM} \iff \vec{AC} + \vec{CN} = \frac{4}{3}(\vec{AC} + \vec{CM})$

$\iff \vec{AC} + \vec{CN} = \frac{4}{3}\vec{AC} + \frac{4}{3}\vec{CM}$

$\iff \vec{AC} + \vec{CN} = \frac{4}{3}\vec{AC} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{4}\vec{CB}$ car $\vec{CM} = \frac{1}{4}\vec{CB}$

$\iff \vec{CN} = \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{CB}$

$\iff \vec{CN} = \frac{1}{3}(\vec{AC} + \vec{CB})$

$\iff \vec{CN} = \frac{1}{3}\vec{AB}$

b) $\vec{CN} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ or ABCD est un parallélogramme donc $-\vec{AB} = \vec{CD}$

donc $\vec{CN} = -\frac{1}{3}\vec{CD}$

Il existe un réel $k = -\frac{1}{3}$ tel que $\vec{CN} = k\vec{CD}$ donc $\vec{CN}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires donc C, N et D sont alignés.

Exercice 2|

1)a) ABC est rectangle en A donc le centre du cercle circonscrit à ABC est le milieu de [BC] dont les coordonnées sont données par :

$x = \frac{x_B + x_C}{2}$ et $y = \frac{y_B + y_C}{2}$

$x = \frac{0+1}{2}$ et $y = \frac{5-3}{2}$

$x = \frac{1}{2}$ et $y = 1$

On retrouve les coordonnées de D donc D est le centre du cercle circonscrit à ABC, appelé $\mathcal{C}$

b) Le rayon de $\mathcal{C}$ est $\frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{65}}{2}$

Dans le repère orthonormé $(O; I, J)$, on a :

$$DF^2 = (x_F - x_D)^2 + (y_F - y_D)^2$$
$$= \left(4 - \frac{1}{2}\right)^2 + (3 - 1)^2$$
$$= \frac{49}{4} + 4$$

$DF^2 = \frac{65}{4}$ et $DF > 0$

donc $DF = \frac{\sqrt{65}}{2}$

donc $DF = \frac{BC}{2}$ donc F appartient à $\mathcal{C}$

2/a) A est un sommet de ABC et D est le milieu de [BC] donc (AD) est la médiane issue de A du triangle ABC

b) $A(4; -1)$ et $D\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

$x_A \neq x_D$ donc une équation de (AD) est de la forme $y = ax + b$

$$a = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{1-(-1)}{\frac{1}{2} - 4} = \frac{2}{-\frac{7}{2}} = -\frac{4}{7}$$

$$A \in (AD) \iff y_A = -\frac{4}{7} x_A + b$$
$$\iff -1 = -\frac{4}{7} \times 4 + b$$
$$\iff \frac{9}{7} = b$$

Donc $(AD) : y = -\frac{4}{7}x + \frac{9}{7}$

c) ~~Vérifions~~ Déterminons les coordonnées du point d'intersection G des droites (AD) et (d)

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{7}x + \frac{9}{7} \\ y = 5x - 8 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 5x - 8 \\ -\frac{4}{7}x + \frac{9}{7} = 5x - 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 5x - 8 \\ -4x + 9 = 35x - 56 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 5x - 8 \\ -39x = -65 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 5 \times \frac{5}{3} - 8 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Donc $G(\frac{5}{3} ; \frac{1}{3})$

G est donc le point d'intersection de (AD) et de (d) qui sont deux médianes de ABC donc G est le centre de gravité de ABC.

3) $(d) : y = 5x - 8$

(d') est parallèle à (d) donc elles ont le même coefficient directeur (qui est 5) donc (d') admet une équation réduite de la forme $y = 5x + b$

$$A \in (d') \iff y_A = 5x_A + b$$

$$\iff -1 = 5 \times 4 + b$$

$$\iff -21 = b$$

donc $(d') : y = 5x - 21$

Exercice 3

1) Soit x le prix d'une rose
Soit y le prix d'un lys

$$\begin{cases} 7x+3y=37{,}5 \\ 4x+5y=34{,}9 \end{cases} \iff \begin{cases} 35x+15y=187{,}5 \\ 12x+15y=104{,}7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x+5y=34{,}9 \\ 23x=82{,}8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4\times 3{,}6+5y=34{,}9 \\ x=3{,}6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5y=20{,}5 \\ x=3{,}6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=4{,}1 \\ x=3{,}6 \end{cases}$$

Une rose coûte 3,6 € et un lys 4,1 €

2) $(-5x+2)(3x+1)\leq 0$

$-5x+2>0 \iff x<\frac{2}{5}$ $\qquad$ $3x+1>0 \iff x>-\frac{1}{3}$

x	$-\infty$	$-1/3$		$2/5$	$+\infty$
$-5x+2$	$+$		$+$	0	$-$
$3x+1$	$-$	0	$+$		$+$
pdt	$-$	0	$+$	0	$-$

$$S=\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{5};+\infty\right[$$

3) a) Cette inéquation est définie ssi $-2x+7 \neq 0$

donc ssi $x \neq \frac{7}{2}$

Ainsi $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{7}{2}\}$

b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{7}{2}\}$; $\frac{4x+19}{-2x+7} \geqslant 3 \iff \frac{4x+19-3(-2x+7)}{-2x+7} \geqslant 0$

$\iff \frac{4x+19+6x-21}{-2x+7} \geqslant 0$

$\iff \frac{10x-2}{-2x+7} \geqslant 0$

$10x-2>0 \iff x > \frac{1}{5}$ $\qquad$ $-2x+7>0 \iff x < \frac{7}{2}$

x	$-\infty$		$1/5$		$7/2$		$+\infty$
$10x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+7$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{10x-2}{-2x+7}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$S = [\frac{1}{5}; \frac{7}{2}[$

Exercice 4

Partie I

1) L'image de 0 par f est 1
L'image de 1 par f est 2

2)

x	$-\infty$		-1		$0{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

3) $f(x) = 0$ pour $x \in \{-1 ; 0,5\}$

4) Les solutions de $f(x) > 0$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}$ situés au dessus de l'axe des abscisses.

$$S =]-1 ; 0,5[\cup]0,5 ; +\infty[$$

5) Les solutions de $f(x) = x+1$ sont les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et d

$$S = \{-1 ; 0 ; 1\}$$

Partie II

1) $f(0) = 4 \times 0^3 - 3 \times 0 + 1$

$f(0) = 1$

et $f(-\sqrt{2}) = 4 \times (-\sqrt{2})^2 - 3 \times (-\sqrt{2}) + 1$

$= 4 \times 2 + 3\sqrt{2} + 1$

$f(-\sqrt{2}) = 9 + 3\sqrt{2}$

2) $f(x) = 1 \iff 4x^3 - 3x + 1 = 1$

$\iff 4x^3 - 3x = 0$

$\iff x(4x^2 - 3) = 0$

$\iff x = 0$ ou $4x^2 - 3 = 0$

$\iff x = 0$ ou $x^2 = \frac{3}{4}$

$\iff x = 0$ ou $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc les antécédents de 1 par f sont $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et 0

3) $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1)(2x-1)^2 = (x+1)(4x^2-4x+1)$

$$= 4x^3 - 4x^2 + x + 4x^2 - 4x + 1$$

$$= 4x^3 - 3x + 1 = f(x)$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)(2x-1)^2$

4) $f(x) = 0 \iff (x+1)(2x-1)^2 = 0$

$$\iff x+1 = 0 \text{ ou } 2x-1 = 0$$

$$\iff x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

$S = \left\{-1 ; \frac{1}{2}\right\}$

5) Dressons le tableau de signes de f

x	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

$f(x) \leq 0$ par $x \in]-\infty ; -1] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$

6) $f(x) - y = f(x) - (x+1)$

$$= (x+1)(2x-1)^2 - (x+1)$$

$$= (x+1)\left[(2x-1)^2 - 1\right]$$

$$= (x+1)(2x-1-1)(2x-1+1)$$

$$= 2x(x+1)(2x-2)$$

$2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

$2x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$2x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\mathcal{C}$ au dessus de d ssi $f(x)-y > 0$ donc sur $]-1;0[\cup]1;+\infty[$

Exercice 5

1) d)
2) c)
3) c)
4) b)
5) d)
6) c)